四庫全書

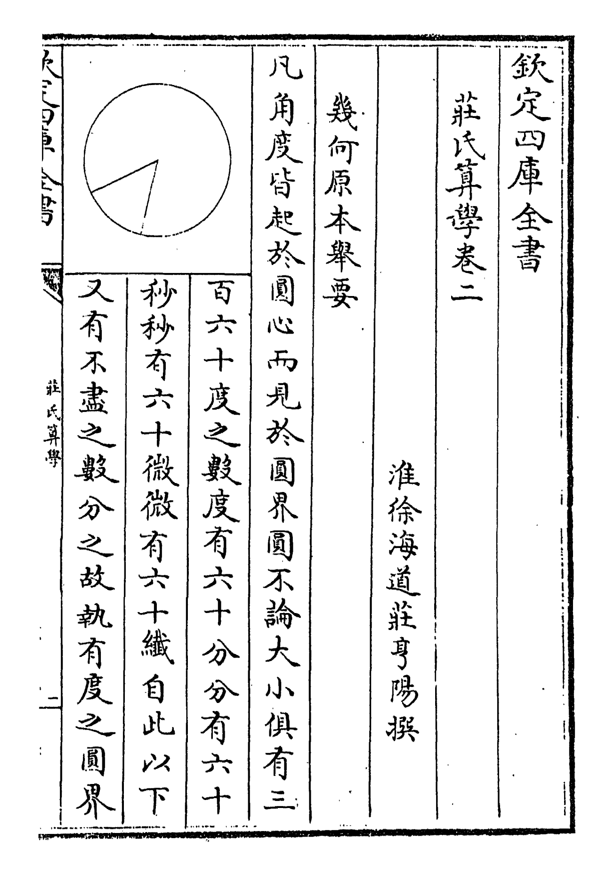
子部

莊氏算學卷二

淮徐海道莊亨陽撰

幾何原本舉要

凡角度皆起於圓心而見於圓界圓不論大小俱有三



百六十度之數度有六十分分有六十秒秒有六十微微有六十纖自此以下又有不盡之數分之故執有度之圓界

為凡角大小之規也

二平行線若作一斜線交加於上則二橫線內外所成之二角俱為相等

在平行線上作一斜直線即成八角此八角之庚戊乙甲戊己兩相等角謂之對角甲戊庚庚戊乙兩角同心謂之並角庚戊乙戊己丁二角相等角一邊謂內外角甲戊己戊己丁二角相等角其尖錯交謂相對錯角庚戊乙丁己辛二角之等角一邊謂之外角乙戊

己丁己戊二角之相等角一邊謂之內角八角之中半鈍半銳各自相等推之三平行線四平行線皆然也

凡三角形之三角相並必與二直角等而具半周之度

凡三角形自一界線引長成一外角將三角形內所對二角並之始與一外角等

凡三角有二形兩邊線之度各等二線所合之角俱等則二形底線之度必等式亦等其下各二角皆等也

若二形三界線之度各相等則三角度亦必等而形內

所函亦等也

若二形一界線之度相等於相等線左右所生之二角又相等則他線他角俱各等而二形之度俱等也

三角形有二邊等線者其底線之兩角度亦為相等也

蓋作一長線上剖角下剖底成兩直角三角形各相等也則底線左右所成角必等可知

凡三角形之長界線必對大角最長對最大次長對次大短者對小者

凡三角形必有二鋭角何也凡三角形將三角並之必與二直角等故一鈍必兩鋭一直亦兩鋭即三等角亦皆鋭也

凡自一點至一横線作衆線衆線內有一垂線必短於他線而他線之與垂線相離愈遠者線愈長也

凡三角無論直鋭鈍合並二界線必長於所餘之一界線所以凡自一點又至一點晝幾線其各線中僅一線直而短餘必曲而長矣

四邊形有五種一四方形邊角俱等也一長方形角等而兩邊長兩邊短也若四邊等而角兩鈍兩鋭者謂斜方形又兩邊長兩邊短而角兩鈍兩鋭者謂長斜方形若四邊不等四角又不等者謂無法形

凡四邊平行線形其角之各兩對角必俱相等

於對角作線分為兩三角形是為對角線必將平行線四邊形分為兩平分

凡平行線之四邊作兩對角線相交處為平分二線之

正中

凡於四邊形對角線之正中作一斜橫線截開則將四邊形為兩平分

四邊形若於對角線不拘何處交加依兩界作二平行線即成四四邊形二形為對角線內之形二形為對角線旁餘之形此兩旁形其積必等蓋對角線原屬平分而等今交加線中所成兩大三角兩小三角形亦屬平分而等於原兩三角內對減兩

大三角兩小三角則所旁餘四邊形其積亦必等

兩平行線内凡同底所成之四邊形其面積俱等何也如甲乙戊丁丙己兩三角形其甲丁戊己二線之度俱與乙丙平行線為等故互相等也若於甲丁戊己二線每加一戊丁線即甲戊丁己兩線俱等因甲乙丙丁之四邊形為平行線則所各相對之線亦俱等也再戊甲乙己丁丙二角為甲乙丁丙平行線一邊之内外角兩形為等自此兩三角形減去丁戊庚所

存之甲乙庚丁戊庚丙巳二形俱等於此所存之二形每加一庚乙丙形則成甲乙丙丁戊巳丙乙之相等積四邊形矣故凡兩平行線內凡同立於一底者則線無論短長所存之四邊形俱等積也

兩平行線內若同立一底凡所有各種三角形之面積亦俱等也盖三角為平行四邊形之一半四邊既等則三角亦等也底度同亦然

凡衆角形自角至心作線有幾界即成幾角形若作六

界即成六三角形矣

欲知衆邊形角度之數將邊數加倍於得總數内減四其所餘之數為直角數即為衆角度也如七邊形是七個三角形凡三角形併三角等兩直角則七三角形等十四直角而圜心所有之七角當四直角矣故將十四直角減四直角餘十直角之度為衆角之總度也

凡一直線切於圜界雖長過界而不與圜界出入交加

此謂之切線又兩圜之圜界相遇相切而不相交加出入謂之切圜

凡一直線横分圜界謂之弦如戊所分圜界之一段謂之弧如甲乙丙弦線與弧線相遇處成兩形如甲乙丙俱為圜之弧分之角

凡自弦之兩頭作兩線外向圜界相遇此角名為圜分内角又謂對弧立角

自圓心作二輻線至弧線成三角形謂之分圓面形

凡自與圓界相切輻線之末作垂線必在圓外

凡在圓弦線若自圓心作垂線可以平分弦線垂至圓界便可平分弧線蓋自甲心作兩半徑至乙丙二處其線相等則丙乙二角相等故自甲角至乙丙底線之丁處作垂線便是平分也

凡自圓外一點至圓界兩邊作二切線此二線必相等

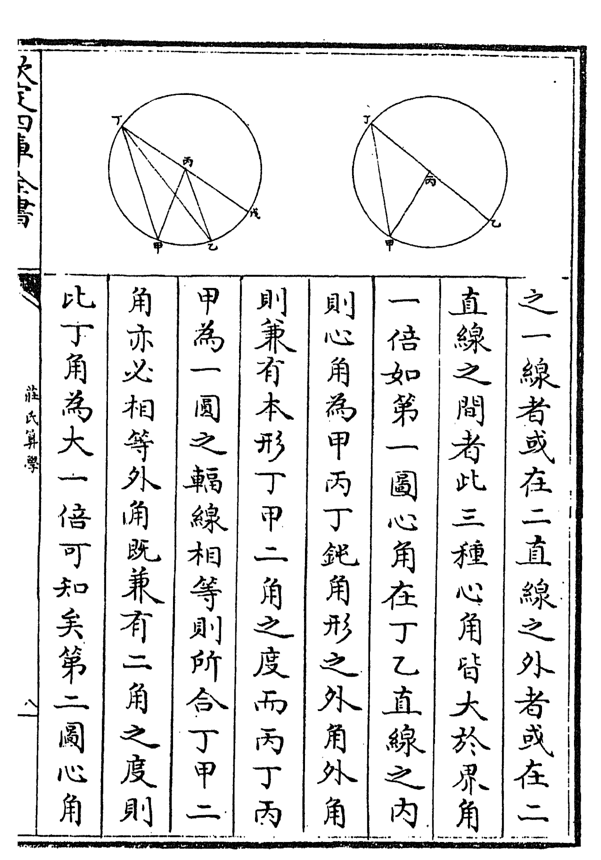
蓋自圓心作二輻線與二切線相切則二切線與二輻線互為垂線而兩線相遇之角必俱為直角又於兩直角作一對角線是謂弦線而成丁乙丙與甲乙丁兩三角形丙乙丙丁係輻線原等則底線兩合角必等減圓內兩角數則甲乙丁甲丁乙二角乃兩直角之所餘也二角既等二切線亦必等矣

凡圓有兩弦線若等其分圓弧面之積亦等若自心至

兩弦各作一垂線則二垂線度亦等又自心至兩弦線之各兩頭作四輻線亦等則所成之兩三角形亦等

於甲乙輻線末作垂線者切線也甲輻線割圜於戊而至丁者割線也戊垂線至己者正弦也凡立於乙戊弧之角者欲求三角之度三邊之數皆於是取也

三角俱抵圜邊者界角也一角居心二角抵邊者心角也心角交與界角有三種具圜心所生界角或在二直線



之一線者或在二直線之外者或在二直線之間者此三種心角皆大於界角一倍如第一圖心角在丁乙直線之內則心角為甲丙丁鈍角形之外角外角則兼有本形丁甲二角之度而丙丁丙甲為一圜之輻線相等則所合丁甲二角亦必相等外角既兼有二角之度則此丁角為大一倍可知矣第二圖心角

在丁乙直線之外則自丁過內心至戊作一直線成甲丙戊一大心角甲丁戊一大界角乙丙戊一小心角乙丁戊一小界角准前論大心角倍於大界角小心角亦倍於小界角今於大心角減去小心角大界角減去小界角則所減之心角倍於所減之界角而所存之原心角亦倍於所存之原界角也第三圖心角在丁乙丁甲直線之間自丁界過丙心至對界作一直線亦如第一圖論將

心角剖為二界角亦剖為二則分為兩心角各倍於兩界角仍合為一心角則倍於一界角也

自圓之弧線凡一段任與圓界何處其尖相切所成之界角有幾何其度俱為等也蓋同立一弧者心角皆大於界角一倍如上節所云則同弧之界角不論何處皆小於心角一倍也因其俱為心角之半則不拘何處作界角皆相等也

圜内有一心角一界角若心角所對弧度得界角所對弧度之一半此兩角度必相等也蓋同弧之心角大於界角一倍今於心角弧度去一半則兩角必相等也

凡圜之界角若立於圜界之半必為直角蓋心角所對弧線若是界角所對弧線之一半則二角之度必等今界角對弧為半周將半周弧剖作二心角則二角皆為直角既為直角則界角對弧乃兼兩心角對弧者安得不為直角乎

凡圓之界角若在半圓分之小分內必爲鈍角也如圖甲乙丙爲小半圓則所餘甲丁丙爲大半圓若將甲丁丙弧線於丁處平分又自圓心作戊丁戊甲兩線丁甲弧大於圓周四分之一爲鈍角也又心角對弧若爲界角對弧之一半則二角度爲相等今甲丁正得甲丁丙之半則戊爲鈍角乙亦爲鈍角也

凡圓之界角若在半圓分之大分內必爲銳角也如圖

甲乙丙為大半圓所餘甲戊丙為小半圓若將甲丙為弧線兩分於戊又自丁作丁甲丁戊兩線成甲丁戊心角形此心角形所對既不足圜界四分之一則為鋭角也既為鋭角則甲乙丙角必為鋭角可知矣

函圓形者有函圓切三角形函圓切四方形有函圓切多邊形圓內切形者有圓內切三角形圓內切四方形圓內切多邊形函圓衆界形之度大於函於圓之界其

函衆界形之圜界度亦大於所函之衆界形在外者大在内者小也故函形界必大於函於形界也

有一函圜衆界形又一直角三角形此三角形一直角所生二直線内一直線度若與所函圜之輻線度等又一直線度與函圜衆界形之各界共度等則三角形面積與衆界形面積俱等也如自幾邊形之心至角作幾線分為幾三角求三角之中長線即輻線也底等高等所作三角形俱等即所云二平行線内同底所作三角

形俱等也合衆三角形之底為一大三角形之底其面積當無不等也

一圜所函之衆界形一直角三角形此三角形之一直角所生二直線內一直線度與彼圜自心至衆界形界所作垂線度若等再一直線度與彼衆界形之共界度若等則兩形之面積俱等也

有一圜形有一勾股形若股如半徑勾若全周則兩形之面積必等也葢比前函圜之衆界形則為小比前函

於圓之衆界形則為大就中間取之恰合無疑也夫函
於圓之衆界形輻線及界而不及弧是比圓為小也函
圓之衆界形輻線雖及弧而衆界度共線又長是比圓
為大也今以圓周及輻線取直角三角形而合之相等
無疑則可得圓之面積也蓋圓線式與於直線式難於
符合然苟將圓線作萬萬段亦與直線近也
衆界形或函圓或函於圓其界數愈多愈與圓界度相
近如自函三邊而為六邊六邊而為十二邊十二邊而

為廿四邊無論內外愈近圓界度數也試設一函於圓九十六邊形又設一函圓九十六邊形而作一圓若將函圓形作一千五百六十二分又將他形照此所分之度分之則函於圓形僅得一千五百六十一分矣而圓界度大於所函之衆界小於函圓之衆界必得一千五百六十一分餘其圓界中心徑線必得四百九十七分若即小數筭之將圓界作二十二分則中心徑線必得七分餘故在圓界可得直線之度在直線亦可得圓界

之度也

有一圜形又一衆界形此圜界度若與彼衆界度等則圜形之面積必大于衆界形之面積也試凖前半徑作股界度作勾之法求之則方周圜周之界度雖同而圜之垂線長方之垂線短則方所成之三角不及圜所成之三角而所函之面積方亦不及圜矣

凡平面上所立之線若無偏斜猶平階立直柱其各邊所生之角若俱直是謂平面上之垂線

相對兩平面之角各垂線度若俱等此相對二平面謂之平行面

平面上所立之平面若無偏斜猶平地上作直壁是謂平面上之直平面

自三面四面以上其各辦相並所存之角謂之厚角

成厚角之平面各角度不足於四直角度也何也試將五面厚角尖使其平伸共為一平面則五辦各相離而有空處

不能成圜面故不足四直角也若欲將四直角顯尖作

厚角其瓣大而不能成平面厚角矣

平面三稜厚角其三面內若將兩面角並之必大於所

餘之一角度也試將三平面使之平伸而兩角相並一

角弧行則可見矣

凡平面上二直線相交處作一垂線莫偏斜則此線於

平面上在在俱為垂線也蓋若有偏則自平面上視之

或成鈍角或成銳角既無偏斜則為直角既為直角則

移向平面上處處俱為垂線矣

衆線相交處立一垂線其角若俱直此所交之各線必在平面一也

平面上作二垂線正直立之此二線必互為平行也葢於平面上作一直線而正直作二垂線則所交直線之角皆為直角所謂二直線一邊成内外之二角也

凡平行二線之間任意自此一線至彼一線隨處作直線斜線交線三角形線俱同原平行線在平面上

二線與他一線平行雖在别面此二線亦互相為平行也

相對二平面間若横一線正垂在二平面上俱生直角此相對二面互相為平行面也蓋於二平面上各作對角斜線兩相交處為兩平面之中而垂線正當兩線相交之處而俱成直角則兩平面上之兩對角四邊俱係平行則兩平面亦必為平行者也

二平行面上凡相當之各二線俱為平行也

二平行面横穿一平面而皆成直角則中間縫線亦必平行也如以木版穿木版之狀

各種面内積之處謂體依面之端名之也設如全身無角只有一圓面此謂圓體全身各面俱平而有角此謂平體立方是也其身有曲平兩相襍謂之襍體如半截橄欖是也全身相對之各二面俱平行此謂平行面體長立方長斜立方是也全身相對之面不平行而獨兩底面平行此謂底平行面體三角柱是也周圍圓形而

底與面平謂長圓體圓柱是也一平面底而立幾平面俱合於一角而成大此總謂尖瓣體也底三角者為三瓣尖體底四角者謂四瓣尖體底衆角者謂衆瓣尖體若在平面上立圓面而成鋭尖此謂尖圓體也所云圓體長圓體尖圓體此三種面俱生於一動之間耳以甲乙為樞心將甲乙丙作轉式旋轉一周即成為圓體也於甲乙丙丁平面形以甲乙為樞心以丙丁線界作轉式旋轉

一周即為長圓體也於甲乙丙三角形以甲乙為樞心以丙界作轉式旋轉一周即尖圓體也樞心正則為正體樞心偏則偏體矣

凡體若面平行相當所對兩邊面積俱為等也如正方體六面相當則六面面積俱等如長方體各底面相當則底面之面積俱等也

凡體苟面積形式一同俱等謂全等體形不等而積等

謂等積體積不等而式等謂等式體

平行面三凡體形自對角線分為兩叚比兩叚為全等體也

平行平面之間若同在一底立各平行體形其積俱為等如面例

平行平面之間有在等積底所立之各平行體形其積必俱等蓋所立之處不同而其度同也故等也

平行平面之間有在等積三角形兩底所立各三面體

形此所立各體之積必俱等也理如前節

平行平面之間同在一底作一平行體形作一三面體形則三面體形必為平行體形之一半

各種體形難以發明必作圖以明然有空實二端空者宗其空實者宗其實乃可耳

凡等式體苟立於等積之底其體之高若等則其積俱為等凡尖圓尖辦皆然也蓋將大體截分為衆小體其小體底度亦等也

有名種平行底之平面體與各種平面尖體兩底積若等其高數又等則此一平行底之平面體與彼平面尖體三形之積等推之平行面體與四辦尖體三形之積等平行底之圓面體與圓面尖體三形之積等蓋三面尖體為三平面平行底平面體三分之一四面尖體為平行面體三分之一尖圓體為圓柱體三分之一也若將實形作空形以水注之作比例可見

凡相等界度之體內其圓體所函之積數强於他種體

所函之積也如一圓一方一十二辨體論積皆不及圓
蓋如論面函於圓界之積大於各等邊平形所函之積
也六面俱為等面八角俱為直角是謂正方體
厚角正體有五種觀於各面數而名之也一為四辨面
之體此四面每面有三角各三角各三界度若俱等是
謂四辨體二為六辨面之體即正方體也三為八辨面
之體共八面面各三角各三界度若俱等是為八辨面
體四為十二辨面之體此每面有五角各五界度若俱

等是謂十二瓣體五為二十瓣面之體此每面有三角每面各三角各三界度若俱等是謂二十瓣體此正體五種外不生他形總不外三角四角五角之平面合而成也蓋將三角平面形三瓣形合成一厚角餘一面求角合角界合界必取等角等界之平面三角形也四瓣體是也將三角平面四形合之復加四形八瓣體是也將三角平面五形合之復加十五形二十瓣體是也然欲以三角六形合之不能成厚角矣蓋六三角平面形

界於界角於角兩對合之成六角之平面形能為平尖不能顯也是故三角形所生只於四辮八辮二十辮自此而外無有也四角所成只於正方角此外無有也將五角平面形三形合之所成厚角即如十二辮體是也此外不能成他角也至六角平面形則將三角相合已等於四直角能為平面而已不成厚角也六角如此七八以上可知矣

凡此例面比面體比體線比線不同者不相謀也

凡將兩物度數互相比之比比出之度數為大為小謂之比例其比者與所比於物者俱謂率齊數之謂也其比之物謂前率其所比於之物謂後率也如甲乙二線相比此比所比出之甲線或為長或為多乙線或為短或為少謂之比例也將此二線相比故謂之二率而所比之甲線謂之前率其比於之乙線謂之後率矣

凡兩兩相比謂之四率如一率與二率之比同於三率與四率之比此為同理比例也如一率甲二率乙三率

丙四率丁乙線為甲線六分之五丁線為丙線六分之五則甲乙二線之比同於丙丁二線之比是謂同理比例苟求得乙線有甲幾倍之數則可知丁線有丙幾倍之數也

又凡四率將一率與三率分作幾分將分數相等定準此兩率分度雖不同而分數為等於是以二從一以四從三者幾分為均其一與二之比即如三與四之比為同理比例也

有兩不同之比例如二率四率之分數相等而一率於二率為四之六三率於四率為四之五則不同矣而可相比例謂一與二之比大於三與四之比也前比例之數多再比例之數少也故又謂之兩不相同之比例也

有相連比例率如甲線一一率乙線二二率丙線四四率甲與乙之比同於乙與丁之比是謂相連比例倣此於相連比例之內將一率甲與三率丙比者謂隔一位加一倍之比例也將甲與丁比者謂隔二位加二倍之比例

也將甲與戊比者謂隔三位加三倍之比例也比例難於講解試作圖以明之於大圓內作小圓於圓之中心作二線割小圓弧抵大圓弧則成大圓己甲庚小圓辛甲壬之甲角此甲角之對弧己庚皆為大圓之六十度則亦為辛壬小圓之六十度蓋圓之大小雖不同而分數為等故以大圓周為一率庚己弧為二率小圓周為三率壬辛弧為四率一與二之比同於三與四之比也兩圓周

為比之之率為前率兩弧為比於之率為後率兩兩相當分數俱等是為順理比例也做此凡各率各度雖異相當之數若等一二之比同於三四之比俱為順理比例又有幾種論如左一種反比例反一為二反三為四仍相等也如前大圜周為一率大弧界為二率小圜周為三率小弧界為四率今以大弧界為一率大圜周為二率小弧界為三率小圜周為四率比例亦同也一種轉理比例謂一與三比二與四比也以大圜周為

一率小圜周為二率大弧界為三率小弧界為四率其比例亦無不同也

一種分理比例謂於一率三率中各減與二率四率相等之一分以比二率四率仍為相當比例也如二率四率原於一率三率為六之一今各減一率三率之一分則又為五之一比例亦然也

一種合理比例謂合原一率二率之數以比二率合原三率四率之數以比四率原各為六之一今又各為七

之一也

一種更理比例謂换却二率四率之原數各更以他數如原各為六之一今又各為六之五也

一種隔位比例如有兩項四率原為相當比例則以此四率中之一率與四率為比又以彼四率中之一率與四率為比合為一四率仍為相當比例率也

一種錯綜比例如此邊有相連比例三率彼邊亦有相連比例三率取此中末之比例彼中末之比固也苟錯

綜之則取此中末之比例彼另設一線置於彼第一線之比又取此上末之比例彼另設一線與彼中線之比蓋彼雖另設一線仍是相連比例線此相連之比同於彼相連之比此隔位之比亦同於彼隔位之比也

一種相減比例如甲丙乙丁二線所有之三倍內減去丙戊丁己二倍互相之比同於原甲丙乙丁二線之比

丙　戊　甲

丁　己　乙

也

一種相加比例如甲乙二線照本度各加三倍為丙丁

線互相之比同於原甲乙二線之比也得此比例線之法則面之相當者為比例面體之相當者為比例體也且線亦可以例面面亦可以例體也如甲六分線與乙三分線相比丙六分面與丁三分面相比戊六分體與己三分體相比每每相當分數相等則互相為比例也

以二數相乘所得兩數為均若以二線均為幾度每各線度作小方形以此線小方乘彼線小方即成兩直角

四界形葢以一線為横一線為縦彼此互乘形亦均也
又一線分為三度作小方形一線分為四度有竒作小方形一線横一線縦乘成函十二長方形而竒數亦附於方末也
又將前線所作方形取其半相乘亦得四方形也葢取三方之半而為六小方取四方之半而為八小方八六四十八六八亦四十八便成兩函四十八之長方形而其總度仍相等也葢兼取其半而無改於原度故也

四方直角平面形凡在一線可以相乘也如甲乙形欲

乘丙丁線則將此形作四小方體又將丙丁依甲乙所

分之厚分比之若得三分則將甲乙形三層垜之遂成

函十二小方形之直角體也凡六面平行直角體必得

疊一四邊直角平面與一直線相乘而成也

凡兩直角平面形欲相比例有兩比例焉如大形之長

度與小形之長度幾倍為均大形之寬度與小形之寬度幾倍為均是也然合闕比兩比例仍是一比例如甲

方之長與乙方之長三倍為均甲方之寬與乙方之寬兩倍為均二三相乘為六則甲方之形與乙方之形之比例為六倍為均也

若長四倍為均寬三倍為均三四一十二則大形與小形之比例為十二倍為均也再若大形之橫度比小形十二為均小形之直度比大橫直度三倍為均

則以三除十二得四大形比小形四倍為均也若四倍則以四除十二得三倍為均皆成一比例也

有兩直角形若此形之長倍於彼形之長而彼形之寬反倍於此形之寬則此兩形之積為等也或一倍或三四五六倍皆然凡有相比例四率其在中之二率三率相乘所得數必同於一率四率相乘所得數也如一率二二率四三率三四率六以中率三四相乘為十二首尾率二六相乘亦一十二也試將三度四度之線相乘

作長方形又將二度四度線相乘作長方形形雖不同而積等也故一二三率已知者也所求四率未知者也既求得四率則以一率與四率相乘所得數與二率三率相乘所得數無以異也如東河之水流速三倍西河之水流速六倍東河之流一秒十缸欲知西河之流一秒幾何缸則以東河之三倍為一率西河之六倍為一率東河之十缸為三率求得西河之流二十缸試相乘之數為等也又如三個兵每月餉六兩今已五月應餉

幾何則以三兵為一率六兩為二率五月為三率求得餉銀一十兩試相乘之數又等也

有兩個直角面苟此面之橫界與他面之橫界此面之縱界與他面之縱界比例若等則此兩面相比之比例即為兩界相比之比例隔一位加一倍之比例即前相連比例一條所云也蓋兩界之比例第為一倍之比例兩面之比例為加一倍之比例也如甲之橫界大于乙一倍而為二縱界亦大於乙一倍而

甲

乙

為二則甲之面大於乙之面三倍而為四為二倍為均者二若甲之橫界縱界各大於乙五倍則甲之面內與乙之面內六倍為均者有六矣

丙乙之邊線為相連比例丙乙之面於相連比例中為

丙　乙　甲

隔一位加一倍比例今設一甲線為一分乙線為二分丙線為四分為相連比例則丙面與乙面之比同於丙線與甲線之比蓋丙面大於乙面三倍丙線長於甲線三倍共為隔一位加一

倍之比例也

前數節所論直角面之縱橫界比例等者謂之同直角面其兩相比例之橫界俱謂之相當界也

在相同直角面縱橫兩相當界之比例必等也

在相同直角面於兩面相當之一界作為兩方面則所作兩方面互相之比即同於原面互相之比亦為隔一位加一倍之比例也

直角體則有三比例長也寛也厚也如大形之長寛厚

各大於小形之長寛厚一倍則先成長寛倍之平面形於平面形上又疊一相等之平面形則亦倍厚矣倍而成平面則二倍為均者有二倍而成體則四倍為均者有二矣

有直角兩體茍此一體之底與他一體之底為大一倍而他一體之厚與此一體之厚亦大一倍則此二體之積等葢即一體之竪起與放倒也

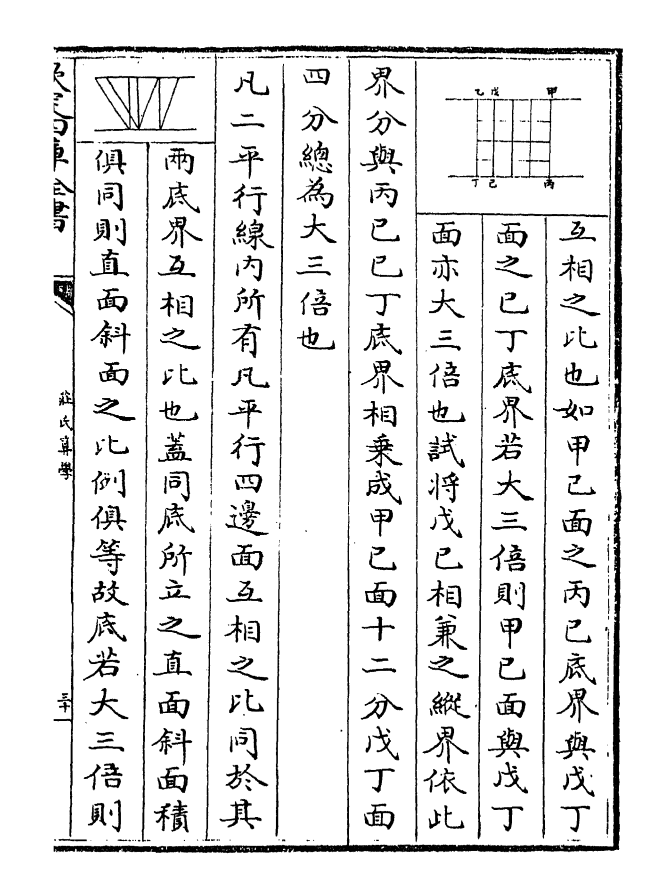
有兩直角體茍此體之長寛厚界與彼體之長寛厚界

相比之比例若俱同謂之同式體而長寛厚各一邊相比例之界俱謂相當界也

凡兩直角同式體互相比之比例為界比例之隔二位加二倍之比例也如大體之長寛厚比小體各大一倍則此兩體相比之比為隔二位相加之比例也蓋界線為相連之比例者倍而為平面為隔一位相加之比例又倍而為體則為隔二位相加之比例也苟作一相連比線之率甲為一分乙為二分丙為四分丁為八分又

作一直角體與三界各加一倍之直角體則小體與大體之比同於一率甲線與四率丁線之比若知甲線比丁線為八分之一即可知大體比小體為八分之一也有直角同式兩體在此兩體比例相當之二界立作兩四方體互相以比之其比例仍同於原體之比也蓋原體為隅一位加一倍之比例則於兩相當界所作體亦為隅一位加一倍之比例均是八分之一也

凡二平行線內凡有直角面互相之比同於與此兩底



互相之比也如甲己面之丙己底界與戊丁面之己丁底界若大三倍則甲己面與戊丁面亦大三倍也試將戊己相兼之縱界依此界分與丙己己丁底界相乘戊甲己面十二分戊丁面四分總為大三倍也

凡二平行線內所有凡平行四邊面互相之比同於其兩底界互相之比也蓋同底所立之直面斜面積俱同則直面斜面之比例俱等故底若大三倍則

面亦大三倍也

凡在二平行線之間若有兩三角形以兩形積互相之比必同於兩底界互相之比也蓋同底所作之三角形為四邊形之一半四邊形之比例等則三角形之比例亦等故三角底若大一倍則三角形積亦大一倍底若大三倍則積亦大三倍也

凡三角幾形之底俱在於一直線又與各底相對之衆角皆聚於一處則其三角衆形必在二平行線之間也

觀圖可見

凡三角形作與底線平行之線不拘何處截斷則兩旁之線皆成四比例線如圖甲丁與丁乙之比同於甲戊與戊丙之比是二段互相比之比例同也又甲丁一段與甲乙全線之比同於甲戊一段與甲戊全線之比是分線之比例同也故曰四相比例也蓋自乙至戊自丙至丁作乙戊丙丁二線分為幾三角形此內之乙戊丁丙丁戊兩三角形既在二平

行線之間又同立於丁戊之底則其積等也又各增入甲戊丁三角形其積亦等也又甲丁戊丙丁戊兩三角形其底線同在甲丙一直線而兩角又相遇於丁即如前所云二平行線之間有兩三角形則兩形積互相之比必同於兩形底界互相之比則甲丁戊形積比丙戊丁形亦同於底線甲戊比戊丙之比例再彼甲丁戊乙丁戊兩形積之比亦同於甲丁丁乙兩底線之比也再甲乙戊甲丁丙兩形之積既等則甲丁戊形積與乙丁

戊形積之比同於甲丁段與乙丁段之比而又同於甲戊段與丙戊段之比是以甲丁段與乙丁段之比必同於甲戊段與丙戊段之比也故以甲丁為一率丁乙為二率甲戊為三率可以求戊丙之四率也誠如是以甲乙丙全形之三角或與所分甲乙戊三角或與所分甲丙丁三角之比例俱為同也因其比例同而此三角全形所分兩形之積既為等則甲丙丁所分形之甲丁底與甲丙乙全形之甲乙底互相之比與甲乙戊所分形

之甲戊底與甲丙乙全形之甲丙底互相之比俱為同也則甲丁段之一分為一率甲乙全線三分為二率甲戊段一分為三率甲丙全線四分為四率亦為相比例率也

凡在三角形內不論何處作與底平行直線則以所作平行線與原底線之比同於兩邊所截一段與各每邊全線之比也

如圖所截若甲丁段二分甲乙線六分則丁戊線亦為

二分乙丙線亦為六分可知也何也試將甲乙丙三角形轉以乙甲線為底於戊丁線之戊處至已處作與甲乙平行線則已乙之度即戊丁之度準前節全線與截段相比之例則戊丁平行線與原為底乙丙全線之比必同於甲戊與甲丙全線甲丁與甲乙全線之比也故以甲戊為一率甲丙為二率戊丁為三率乙丙為四率為四相比例以甲丁為一率甲乙為二率戊丁為三率乙丙為四率亦四相比例率也

大小三角形每每相當角角若等則其積雖異而其形為同謂同式三角形也再有一三角形自此形分之出一庚子癸三角形又出一子丑壬三角形此所分出兩形與原形每每相當角俱等亦謂同式形也

三角衆形內相當各二角度若等則餘一角度必等亦謂同式三角形也蓋三角相合必與二直角等足半周之度也

有衆大小三角形若同式將衆形相當界互相比之比例為同俱為相比例率也如二勾股同式形則比股與相當股之比必同於勾與勾之比股與股之比也試將勾股如前截一小勾股可騐矣

同式直角兩形互相之比同於在此各一面相當界所作方形相比之比例葢三角積得方形之半全與全之比若半與半之比也

同式直角兩形互相之比即是各一面相當界相比之

比例為加一倍之比例也如甲線一分乙線二分丙線四分為相連比例線今兩形之三邊線若各大一倍則亦如直角四邊形積為大三倍矣大三倍則非相連比例線丙為甲線一分與丙線四分隔一位加一倍之比例也

同式鈍角鋭角互相之比亦同於此各一面相當界所作方形互相比之比例丙為在此各一邊相當界互相比之比例隔一位加一倍之比例也理如前節

有多邊衆形其邊數同而相當角度等謂同式多邊形則大形甲邊之比與小形甲邊之比同於乙邊與乙邊之比也

有衆曲界形在曲界形之或内或外作相函之各種直界形其式若等亦謂同式曲界形也兩𩛋界形二圜分形亦於兩中間各作三

角形若同式即謂之同式褀界同式圜分也

大小各圜分之式若同其分限雖殊而分數必等與其分相對所成之心角必俱等也

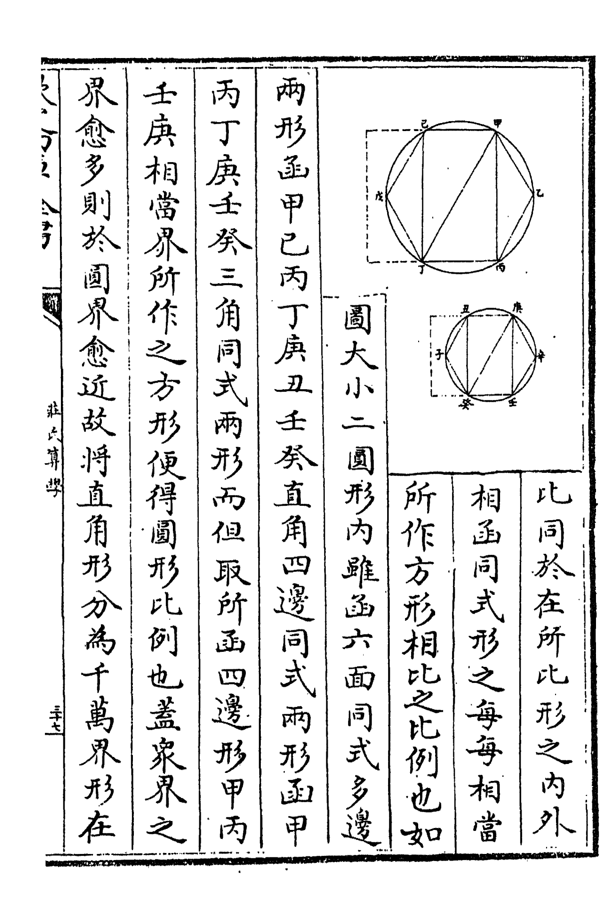
將同式大小多邊兩形内為三角以分此所分相當大小三角形之式俱同也如兩五邊形各分為三三角形則甲乙丙與己庚辛相當為同式甲丙丁與己辛壬相當為同式己壬癸與甲丁戊相當為同式蓋兩形相當角度等

則相當界互相比之比例等也乙丙庚辛二界相當之比同於甲丙巳辛相當二界相比之比例由是甲丙巳辛之比同於丙丁辛壬之比丙丙丁辛壬之比亦猶甲丁巳壬之比丙甲丁巳壬之比亦猶丁戊壬癸之比故曰相同式也

凡同式多邊大小衆形互相之比同於在此相當界所作四方形互相比之比例兩與此各一面相當界互相比之比例為加一倍之比例也理如前

凡大小同式直界形互相之比同於在其形内外相函之同式形各相當界立作平面方形互相比之比例如圖甲乙丙庚辛壬相當三角各二形之比同於在甲丙庚壬所作方形相比之比例也蓋大形所函者甲丙巳丁之形小形所函者庚壬癸丑之形故於甲丙庚壬相當二界立作方形而得比例也

凡圜曲襍各種界形之内將每每一類同式形互相之



比同於在所比形之內外相函同式形之每每相當所作方形相比之比例也如圖大小二圓形內雖函六面同式多邊兩形函甲己丙丁庚丑壬癸直角四邊同式兩形函甲丙丁庚壬癸三角同式兩形而但取所函四邊形甲丙壬庚相當界所作之方形便得圓形比例也蓋衆界之界愈多則於圓界愈近故將直角形分為千萬界形在

圜界可以近用之而圜曲形亦既可以為千萬直界形以用之故將此二圜為同式直界互相之比同於在所函同式形之相當二界所作方形相比之比例也然則二圜互相之比同於或在輻線或在徑線所作方形相比之比例可知矣

凡大小平面體之相當角度若俱等相當界互相比而比例若同是謂同式體正方體四觚面體皆然若圜柱體則論其中所函尖觚等體若同式則謂之同式圜體

各種體之式若同將每每一類體互相之比同於在每每相當界作四方體相比之比例如於兩同式尖瓣體之相當作四方體是也

同式各種體內將每每一類體互相比者同於在此內外各所函者函於者同式體之每每相當界作方體互相比之比例也如兩球體函於兩方體以小球則大球則以小方為一率小球為二率大方為三率可以得大球之四率也

自直角三角形之直角至相對界作一垂線分為兩直角形則此大小三三角形俱為同式也蓋中垂兩傍所成俱為直角而乙角又不變兩角相等則一角亦等而丁變為甲甲變為丁矣兩角亦不變而與乙甲丁同為同式三三角形也

甲 丙 丁 乙

自直角三角形之直角至於對界作一垂線截相對界為兩段則所截之兩段長者為一率短者為三率而垂線為中率為相連比例三率也如甲乙

甲 丁 乙 丙

丙甲丁乙兩角俱為同式則比例必同以乙丁比甲丁同於甲丁比丁丙也

自直角作垂線至於對界在此垂線作四方形又將所分對界兩段一段為長一段為高合作長方形兩積俱等也蓋三線既為相連比例線凡相連比例三線其中線自乘之積同於一線三線相乘之積故也

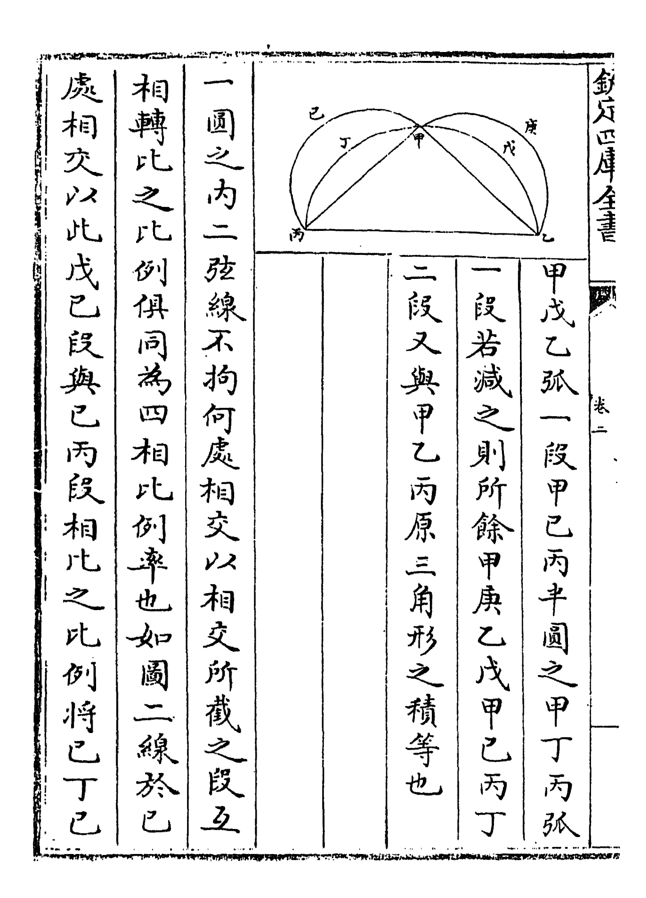
凡直角三角形是謂勾股勾股上兩方合之與弦上方

等積何也如圖以甲乙丙全形分為甲乙庚甲庚丙大小兩形是為同式形而每每相當界互相比之比例同也於是以小形庚丙與全形甲丙之比同於全形甲丙與全形乙丙之比為相連比例率也則在甲丙中率所作四方形必同於一率庚丙為高與三率乙丙為長相乘所作長方形之積等也又大形乙庚與全形甲乙之比同於全形甲乙與全形乙丙之比亦為相連比例率而在

甲乙中率所作方形同於一三合率所作方形之積等也今庚丁乙壬所分之兩形與己丙戊乙兩方形每等則將所分兩形相合則乙丁方形自然與己丙戊乙兩方形等可知矣

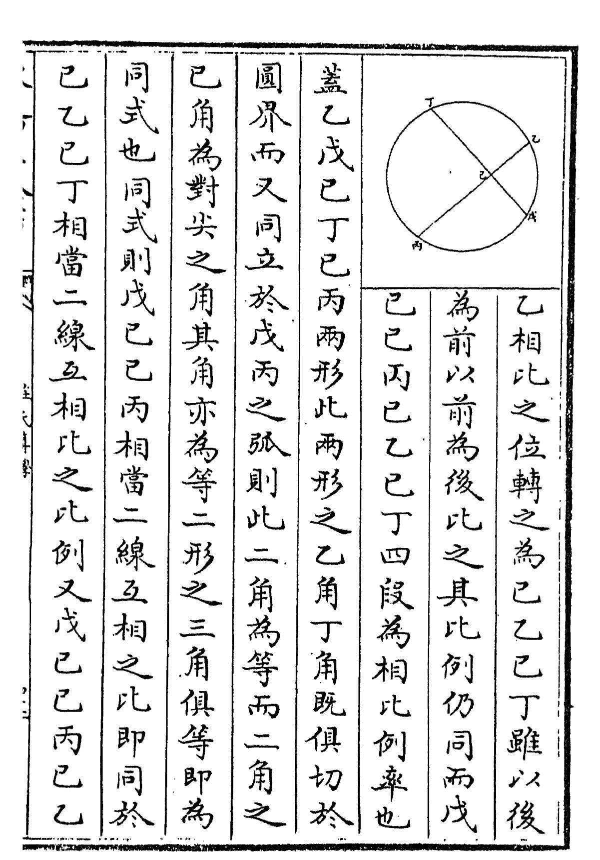
在勾股弦三界作凡同式三形弦上積兼有勾股之積也

在直角三角形之大界作乙戊丁丙一半圓在二小界作甲庚乙兩半圓亦如前節為等也而甲庚乙半圓之



甲戊乙弧一段甲己丙半圓之甲丁丙弧一段若減之則所餘甲庚乙戊甲己丙丁二段又與甲乙丙原三角形之積等也

一圓之內二弦線不拘何處相交以相交所截之段互相轉比之比例俱同為四相比例率也如圖二線於己處相交以此戊己段與己丙段相比之比例將己丁己



乙相比之位轉之為己乙己丁雖以後為前以前為後比之其比例仍同而戊己己丙己乙己丁四段為相比例率也

蓋乙戊己丁己丙兩形比兩形之乙角丁角既俱切於圜界而又同立於戊丙之弧則比二角為等而二角之己角為對尖之角其角亦為等二形之三角俱等即為同式也同式則戊己己丙相當二線互相之比即同於己乙己丁相當二線互相比之比例又戊己己丙己乙

已丁四段俱為相比例率也

於圜徑線不拘何處作一垂線將徑線截為兩段則所截之兩段為一率三率而垂線為中率成相連比例也即勾股垂線之理

自圜外之凡一點出二線過圜界之二處至相對弧界則此兩全線互相之比同於在圜界外所有之二段轉位以比之比例而為四相比例率也如圜自丙

至丁自戊至乙相交作二線成甲丙丁甲乙戊兩三角形則兩形之丙戊二角既同切於圜界同立於乙丁之弧則丙戊等角也再甲角既係公共則亦等角也二角既等則同式矣同式則甲丙甲戊相當二界互相之比同於甲丁甲乙相當二界相比之比例以甲丙為一率甲戊為二率轉位甲丁為三率轉位甲乙為四率俱為相比例率也

將函於圜之三角形於甲角作平分角之甲戊直線則

甲乙傍線與甲丁段直線之比即同於甲戊全直線與甲丙傍線之比也蓋甲乙戊甲丁丙形之丙戊二角同弧同切其度為等而甲乙戊之甲角丁甲丙之甲角既自一角兩平分為兩角其度亦必等是為同式形也則以兩形之相當甲乙小界與甲丁小界之比同於又相當甲戊大界與甲丙大界之比也

將函於圓三角形之甲角為兩平分自甲角至底線作

甲丁直線分底線為兩段以乙丁與丁丙之比同於甲乙傍線與甲丙傍線之比也蓋自丁處作甲乙平行之丁戊線成戊丁丙小三角形則全形之乙角與小形之丁角為平行線一邊之內外角為等而丙角係公共角亦為等為同式形也再甲丁戊之丁角乙甲丁之甲角為平行線間之尖錯交角度為等而甲丁戊甲乙丁之甲角原係平分亦為等是甲丁戊角之丁角甲角等可知兩角

既等則兩等角所對甲戊丁戊線亦必等也是故全形甲乙線與甲丙線之比同於相當丁戊線與戊丙之比而甲戊線與丁戊線等則甲乙比甲丙亦若甲戊比戊丙也又丙乙丙甲二線既為丁戊平行線所截則乙丁比丁丙若甲戊比甲丙也

凡球體在長圓內尚此球徑線與長圓體之底徑高度若俱等則此球積為長圓體三分之二也何則將球體

合長圓體於乙丁平分之又將半長圓體內減去半球體餘乙已庚丁申丙癸凹面體為與已庚壬尖圓體等積等也何以知之將尖圓凹面二體俱與已庚底平行分為幾段之面則兩體之面積每段各相等也試將尖圓體分癸夘申一段之面積必與分曲凹形午癸申戌一段周圍之面積等矣何也以壬癸半徑作正方與壬子子癸兩線作兩正方並之為等也又以壬癸半徑線作一圓與以壬子子癸為兩半

徑線作兩圓並之為等也再壬乙與壬癸俱是一圓之半徑線必等而壬乙與卯午俱為一長方之平行線亦必等則卯午與壬癸亦必等也是則以壬子癸為兩半徑作兩圓亦必等於卯午半徑線所作一圓也今將卯午所作圓內減去與壬子線相等之癸卯線所作之圓即餘癸午曲凹形一段周圍之面與癸子為半徑線所作圓面等也夫卯癸線與癸子線既為等線

丙卯癸與癸子為半徑作兩圓亦必等則癸午曲凹形

戌 申 卯 癸 午

之面積必與卯癸為半徑作圓之面積等矣再將壬未半徑作一圓以壬辰辰未為兩半徑作兩圓等亦如前所云以辰未為半徑作一圓與壬未相等辰巳線為半徑作一圓之面積內減去辰未作圓之面積所餘未巳曲凹形一段周圍之面積與壬辰為半徑作圓之面積等而壬辰與辰寅既為正方之等線則以尖體內之辰寅為半

徑作圓之面積與相對末已由凹形之面積等也夫兩體每段所分既俱相等則全體亦必相等矣前云一尖圓體與一長圓體其底積高數若等則尖圓體與長圓體為三分之一也所餘曲凹形既與尖圓等積則亦三分之一而所減半球為半長圓體三分之二而全球為全長圓體三分之二矣

有一尖圓體又一半球體苟尖圓體底徑與半球體徑度等而尖圓體高度與半球體半徑又等則此尖圓體

為半球體積之一半也葢尖圓為長圓三分之一而半球為長圓體三分之二則尖圓為半球之半也又球體徑度與尖圓體底徑度若等而球體半徑與尖圓體高又等則此一球體之積當四尖圓體之積也葢將尖圓加一倍則與半球等合四尖圓則與全球等也有一球體又一尖圓體笱尖圓體底面積與球體外面總積若等而尖圓高度與球體半徑又等則此兩體之積為等也何也將球體從外面至心分為千萬尖體此所分千

萬尖體之底積必與原球外面之總積等亦即與尖圓體之底面積等也又原尖圓體之高與所分千萬尖體之高既等則一尖圓體之積與所分千萬尖體總積等也如是其所分千萬尖體之總積既與原球之積等則此尖圓體之積必與此球體之積等可知矣

凡有一球體苟以此球體之半徑作一圓則所作圓之面積於此球體外面積為四分之一也如前節之言既為相等又作一小尖圓體其底徑與原球徑等其高與

等則此一圓形之面積為與一球體外面積等也蓋以球之半徑作圓之半徑則其面積為球四分之一若以球之全徑為圓之半徑則半徑所作之圓視全徑所作之圓面積又為四分之一矣何則凡圓互相之比同於相當界所作方形互相比之比例又為每相當界互相比之比例為加一倍之比例也茲兩半徑之比為大一倍而兩圓面之比又加一倍即是半徑作圓為一分全徑作圓為四分既為四分則此圓面積與球體外面等

原球體半徑等則於原球為四分之一而於前大尖圓體亦為四分之一也此大小兩尖圓體之高度既等其兩底面積之比同於兩體積之比例體積為四分之一底面積亦為四分之一而於球體外面之積亦為四分之一也因其為四分之一而小尖圓體之半徑原與球體半徑等則以此球體半徑作圓之面積亦與球體外面積為四分之一可知矣

有一球體又一圓形尚此圓形之半徑與球體徑度若

面積及長圓體甲丙周圍面積等如前所云所分千萬長體之共積與子巳長方體爲一半亦如以子庚高度分一半爲戊庚丙戊巳長體即與所分千萬長體相等矣如是則戊巳長方體積與甲丙長圓體等積可知也

有一球體一長圓體苟此長圓體之底徑度高度與球體徑度若等則此球體外面之積爲與長圓體周圍之面積等也

蓋將球體半徑乙壬分爲六分用半徑之半三分與戊

積可知矣有長圓體又一長方體苟此長方體底面積與長圓體周圍面積若等又此長方體高度與長圓體半徑之半又等則此長方體之積為與一長圓體之積等也何也將長圓體從壬癸心線至外面分為千萬長體則此所分千萬長體之共積為子己長方體積之一半也蓋子庚高度與所分千萬長體之壬丁高度相等又長方體之庚己底面積與所分千萬長體之底共

已庚辛長圓體之面積相乘得數照前節所云為長圓體之積也又用所分六分分之二為乙壬半徑三分之一與球體外面積相乘得數為球體之積也夫球體比長圓體積為三分之二矣然用三與長圓體周圍之面積相乘者為得長圓體積用二與球體外面積相乘者為得球體積今以球體與長圓體相比之比例同於為乘面積用三二兩數之比例如是則球體外面之積與長

圓體周圍之積等可知也

有一平面鴨卵形其大徑度與圓徑若等則鴨卵形之平面積與圓面積之比同於以鴨卵形之小徑與大徑相比之比例也何也將與戊己徑線平行任分幾線此每線假如庚辛與壬癸之比同於戊己與乙丁之比而為作鴨卵形之定理也今每平行線俱依此之比例即平行鴨蛋形之積與圓形之積相比同於乙丁小徑與戊己大

徑之比例也

長方面內有平面鴨卵形正方面內有圓形苟長方之寬與鴨蛋形小徑度等長與大徑度等而正方一邊度又圓徑度俱與鴨蛋形大徑度等則以長方面積與正方面積之比例同於以鴨蛋形面積與圓形面積相比之比例也又鴨蛋體大徑與球體徑度若等則鴨蛋體外面積與球體外面積相比之比例同於以鴨蛋體小徑與大

徑相比之比例也何則將兩體外面俱分幾平行圜比每圜假如以子丑圜界與寅卯圜界之比同於以子丑圜徑與寅卯圜徑之比也今照作鴨蛋形之定理而子丑徑與寅卯徑之比同於戊巳徑乙丁徑相比之比例誠如是其每大圜界與相對小圜界俱依此為比例則兩外面積之相比同於兩徑之相比可知矣

有能函鴨蛋體之長圜體則鴨蛋體外面之全積為與長圜體周圍之積等也則試以鴨蛋體之大徑作球之

徑又作一函球之長圓則函球之長圓與函鴨蛋之長圓周圍面積之比同於兩底圓界相比之比例亦同於大徑線與小徑線相比之比例也又球體之面積與函球體之周圍面積既等則以函球體周圍面積與函鴨蛋體周圍面積之比亦同於大徑與小徑之比也則是鴨蛋體面積與函鴨蛋體周圍面積二項與球體面積相比皆同於大徑與小徑之比則鴨蛋與函蛋體兩項面積相等可知矣

有一鴨蛋體函於一球體則兩積之比同於鴨蛋體小徑線所作正方面與球體大徑線所作正方面相比之比例也

有一鴨卵體有一恰函鴨蛋體此兩體積之比同於球體積與函球體積相比之比例也

有一鴨蛋體恰函於長圓體內則鴨蛋體積為得長圓體積三分之二也蓋蛋體與函卵體之比同於球體與函球體之比則彼為三分之二此亦三分之二也

有一長方體恰函鴨蛋體有一見方體恰函球體則長方體積與鴨蛋體積之比同於見方體積與球體積相比之比例也又長方體積與見方體積之比同於鴨蛋體積與球體積相比之比例也

有一球體恰函於長圓體內若將此兩體俱於寅外處分之此所分球體子丙丑一段之凸面積與所分相對長圓體寅巳庚卯一段之周圍外面積為等也

何則假如於癸子丑辰小長圓體內減去壬子丑小尖圓體此所減小尖圓體積為小長圓體積三分之一其所餘者必是三分之二而此所分寅子丑夘曲凹體之一段周圍面積與子丑線為徑作相對圓之面積等矣如是則乙寅子丑夘丁辰癸長圓一段空心體與癸子丑辰小長圓體此二體之底面積高度既等其體積亦等而乙寅子丑夘丁曲凹體之積與壬子丑小尖圓之積等矣然因何為等蓋壬子丑小尖圓體所分每每圓

之面積與所分相對每每曲凸體周圓之面積等也

壬子丑小尖圓體積既為癸子丑辰小長圓體積三分之一又此小長圓體積與乙寅子丑卯丁辰癸長圓一段空心體積為相等則是乙寅子丑卯丁曲凹體之積與乙寅子丑卯丁辰癸長圓一段空心體積為三分之一茍於乙子丑丁球段內減去壬子丑一小尖圓體餘乙子壬丑丁球體一段之積與乙寅卯丁一長圓體積為三分之二也若於乙寅卯丁長圓體內減去壬寅卯

尖圓體為此乙寅卯丁長圓體三分之一餘乙寅壬卯丁長圓體一段之積與乙子壬丑丁球體一段之積等也今將乙寅壬卯丁一段之體從外面至心之壬處分為千萬尖體之尖底面積相乘得數為乙寅壬卯丁一段之體積數也又以此乙子壬丑丁一段之體從外面至心之壬處分為千萬尖體若以乙壬半徑為高度用三分之一與所分千萬尖體之尖底面積相乘得數為乙子壬丑丁一段之體積數也如前所云此乙寅壬卯

丁一段體積與乙子壬丑丁一段體積既等則此兩體面積亦必等而此乙丙丁半球體凸面積與乙巳庚丁半長圓體周圍外面積亦等若於半長圓内減去乙寅夘丁一段外面積於半球體内減去乙子丑丁一段外面積此所減之乙子丑丁一段面積與彼所減之乙寅夘丁一段面積為相等此所餘子丙丑球體一段面積與彼所餘寅巳庚夘長圓體一段面積相等可知也

有鴨蛋體一半有球體一半若全球體徑度與全蛋體

大徑度等而半鴨蛋體高度與半球體高度亦等則此半蛋體外面之積與半球體外面積同於以蛋體小徑度與球體徑度相比之比例也理同前

有大小半鴨蛋體有大小半長圓體若全體之小徑與全體之底徑等而大小半體之高度又等則此大小半鴨蛋體外面之積與大小半長圓體周圍外面之積等也何則試作一鴨蛋體外函以球體又外函以長圓體照甲乙高度截於寅丑為長

三分之一則全與全半與半之比亦若三分之一與三分之一之比也是小半蛋體之外面積與小半球體外面之積之比亦若函小半蛋體外面之積與函小半球

體長圓之外面積相比之比例而小半球之外面積既與函球小半長圓之外面積等則小半蛋體之外面積安得不與函蛋體小半長圓之外面積等乎

有一鴨蛋體恰函於一球體内則以鴨蛋每段之積與

相對球體每段積之比同於以鴨蛋體小徑之所作正方面積與球體徑度所作正方面積之比也如圖甲寅夘一段與相對球體甲子丑一段俱與乙丁戊巳大小徑線平行分為幾圓面比所分蛋體每圓之面積與所分相對球體之每圓面積之比同於以乙丁小徑度所作正方面積與戊巳大徑度所作正方面積相比之比例如是則以甲寅夘之體積與甲子丑之體積之比同於乙丁徑之方面積與

戊己徑方面積相比之比例可知矣

在一直線一邊立垂線法如乙丁線欲於乙邊作垂線則將規矩一股任意立於甲丁線上或丙處為心又以一股自乙處轉作一圜則於丁乙線之甲處相交自相交丁處過丙心至相對圜界作一直線此線於戊處與圜界合自戊處至乙處作一戊乙直線即垂線也

分圜界為三百六十度法則照圜之輻線度分此界為

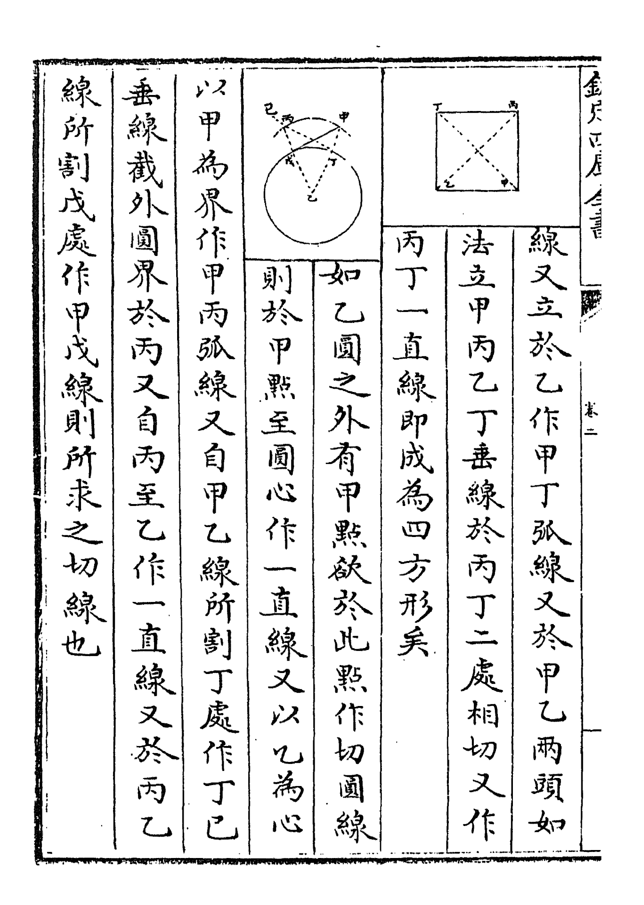
六段六段分為十二段十二段各平分為三段則為三十六段三十六段各平分為五段則為一百八十段一百八十段又各平分為二段則成三百六十段矣

一直線上欲作一三十度角則將甲乙線照分度圓之丙丁輻線度截於戊處又以規矩一股立於甲一股自戊處旋轉作一弧線乃以規矩取圓界之丙庚度將弧線截於己處自己至甲作一直線即為

三十度角也

有丁戊直線欲於丙處作平行線則以規立於丙向丁戊線作弧線如甲又以規取丙甲度立於乙向丙點平行作一弧線又照甲乙度以規立於丙向第二次所作弧線處再作一弧線則二線於巳處相交自丙至乙作一直線則成平行線也

如甲乙線上作一四方形則以規矩立於甲作丙乙弧



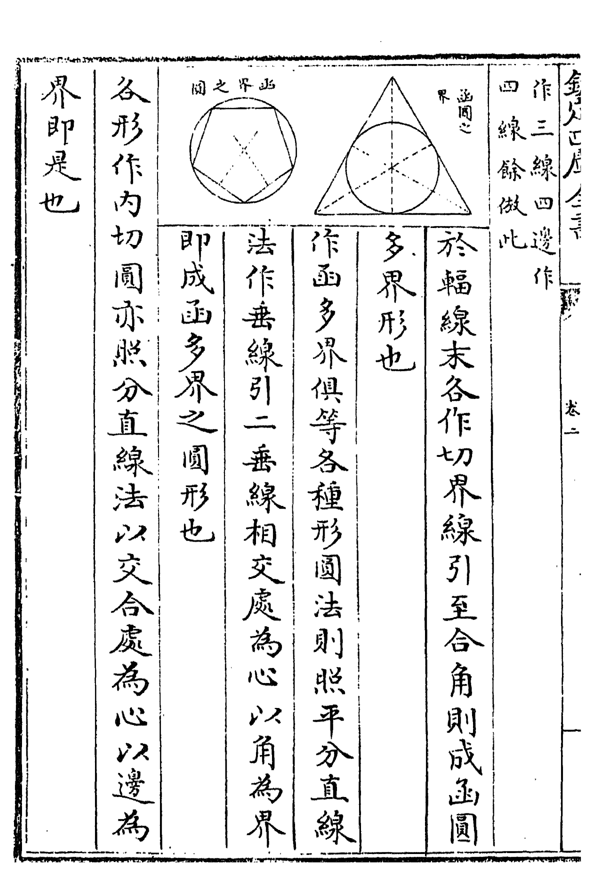
線又立於乙作甲丁弧線又於甲乙兩頭如法立甲丙乙丁垂線於丙丁二處相切又作丙丁一直線即成為四方形矣

如乙圜之外有甲點欲於此點作切圜線則於甲點至圜心作一直線又以乙為心以甲為界作甲丙弧線又自甲乙線所割丁處作丁己垂線截外圜界於丙又自丙至乙作一直線又於丙乙線所割戊處作甲戊線則所求之切線也

欲知圜界内等角之角度則三角形各六十度四界形角各九十度五界形角各一百〇八度六界形角各一百二十度七界形角各一百二十八度三十四分十七秒度各六十分分各六十秒八界形角各一百三十五度九界形角各一百四十度十界形角各一百四十四度十一界形角各一百四十七度十六分二十二秒十二界形角各一百五十度

作函圜多界等度之各種形法則自圜心作幾輻線三邊

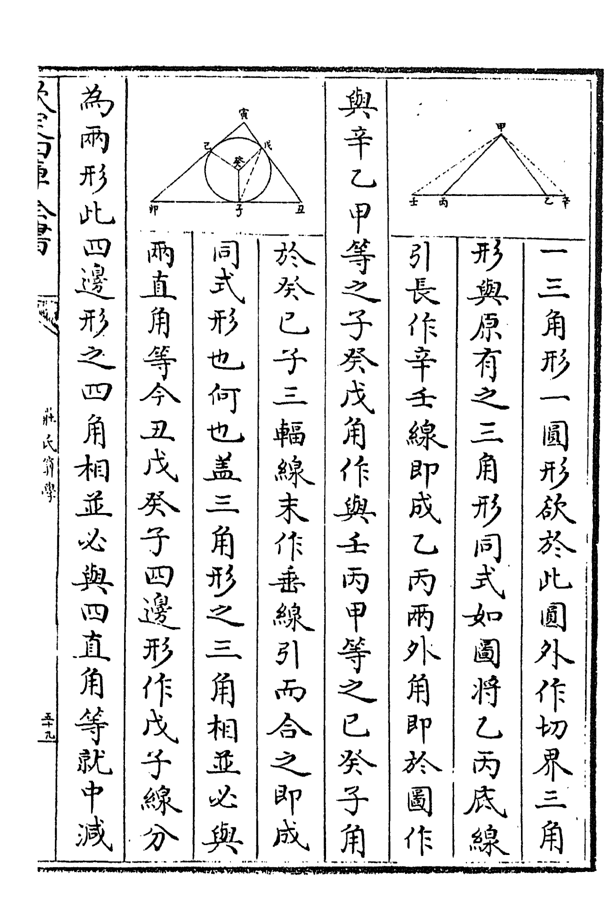
作三線四邊作四線餘倣此



於輻線末各作切界線引至合角則成函圓多界形也

作函多界俱等各種形圓法則照平分直線法作垂線引二垂線相交處為心以角為界即成函多界之圓形也

各形作内切圓亦照分直線法以交合處為心以邊為界即是也



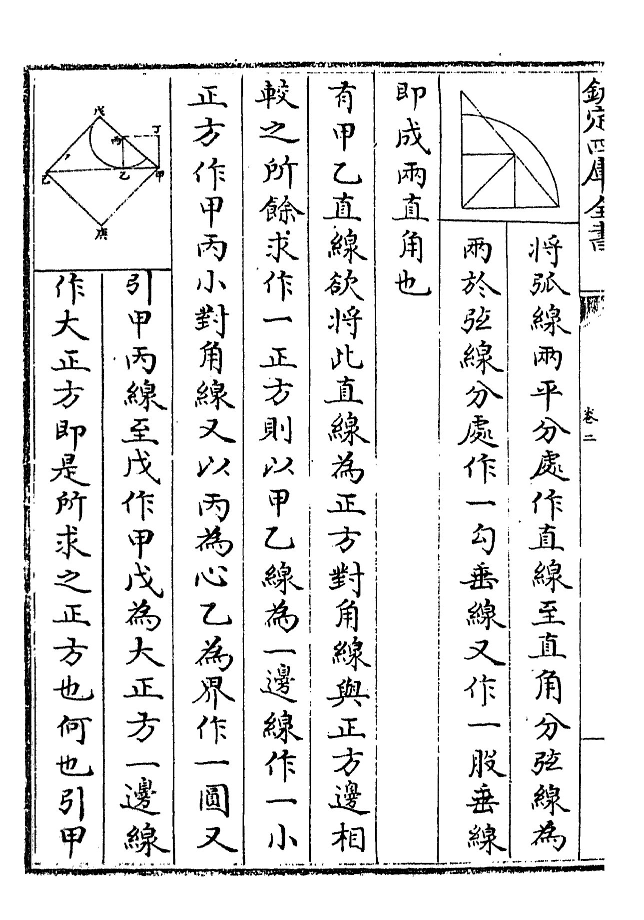
一三角形一圜形欲於此圜外作切界三角形與原有之三角形同式如圖將乙丙底線引長作辛壬線即成乙丙兩外角即於圜作與辛乙甲等之子癸戊角作與壬丙甲等之巳癸子角於癸巳子三輻線末作垂線引而合之即成同式形也何也蓋三角形之三角相並必與兩直角等今丑戊癸子四邊形作戊子線分為兩形此四邊形之四角相並必與四直角等就中減

戊子原作之兩直角所餘癸丑兩角相並亦與兩直角等也又直線上內外並必與二直角等則辛乙甲外角甲乙丙內角並之必為兩直角今戊癸子角既為效辛乙甲所作則戊丑子角必等甲乙丙角可知矣準此而論則丙角必等於卯角甲角必等於寅角又可知矣

若欲於圓內作切界同式三角形如圖任意作與甲角等度之辛角將角逐線引至圓界作辛庚辛戊二線再自戊至

庚作一直線又於戊處做乙角作戊角引線至壬切圓界再自壬至庚作直線即成同式形何也蓋戊壬庚庚辛戊兩形同立於戊庚之弧兩壬辛兩角同切於圓界則兩角為等因其為等此辛角原做甲角而為比壬等於辛則亦必等於甲也又戊角乃做乙角而為比亦必等也二角既等則庚角之等兩角可知矣

勾股形作容方則以直角為心勾末為界規作一象限



將弧線兩平分處作直線至直角分弦線為兩於弦線分處作一勾垂線又作一股垂線即成兩直角也

有甲乙直線欲將此直線為正方對角線與正方邊相較之所餘求作一正方則以甲乙線為一邊線作一小正方作甲丙小對角線又以丙為心乙為界作一圜又引甲丙線至戊作甲戊為大正方一邊線作大正方即是所求之正方也何也引甲

乙線至巳為對角線乙巳之線與戊巳之線等盖丙乙丙戊同為小圜之輻線則戊乙兩角為等也若於丙乙巳丙戊巳二直角内減去乙丙戊則所餘乙戊兩角又等也兩角既等則兩邊亦等而甲乙為戊巳相較之餘也

有一直線將此線為底作一兩邊等度而兩邊各一角為上一角之倍則將兩頭各作七十二度角兩線引長相交則上角必三十六度也若以一直線為兩邊等度

線則作一三十六度角兩邊如線之長而止又作一底線則下兩角各七十二度也

若欲以一直線為五邊形之一邊則如前於此線之兩頭各作七十二度之兩邊等形於此形外作切角圓形再於兩長邊弧線度各平分之則成五邊形也何則丙乙弧之界角為三十六度若為心角則七十二度則丙乙弧乃得圓分之七十二度於圓分為五分之一也則於甲丙弧及甲乙弧各兩分

甲 丁 戊 心 乙 丙

之合成五分故為五邊形也

理分中末線將全線求大小分則將全線為一邊線作一兩邊等度兩底角與上一角各大一倍之三角形又作五邊形乃自甲至乙作直線截於丙處則丁戊為全丁丙為大分戊丙為小分得相連比例也蓋丁甲乙戊兩弧線度等則甲戊丁乙甲戊兩角度必等又戊甲乙角與戊丁乙角共立於乙戊弧則角度亦等也再甲戊乙與

戊甲丁兩角本相等若以等角内減去甲丙戊形則所餘丁甲乙丁戊乙兩角必等矣然則丁戊乙角原係與乙丁戊角為大一倍作者則丁戊乙角比甲戊丙戊甲丙兩角為等矣其丁丙甲角因為甲丙戊之一外角與丙甲戊丙戊甲兩内角為等而丁丙甲與丁甲丙兩角為等矣因其等則丁甲丁丙兩線為等也又丁甲甲戊兩線原等其甲丁戊角必與甲乙丁角等而丁戊甲甲戊

丙大小兩三角形內小三角形之丙甲戊角與大三角
形之甲丁戊角亦等又丙戊甲之戊角與丁戊甲之戊
角原係共角亦必等因大小兩三角形既等是為
同式則以戊丁線與甲丁線相比之比同於以戊
甲線與丙戊線相比之比例而丁甲與丁丙等戊
甲與丁甲等亦與丁丙等則以丁戊全線與大分丁丙
相比之比同於丁丙大分與丙戊小分相比之比例為
相連比例也

欲平分甲乙一直線為數段則於甲乙末各作一直線如丙丁將丙丁各為平分作線割甲乙線則甲乙線亦為平分也於是甲乙線與乙壬線之比同於甲丁線與丁己線相比之比例矣

又如有甲乙線於己辛兩處分為三分又有丙丁一線亦欲分為三分為相比例三率則以甲乙線丙丁線為平行線自甲乙之末各分直線切丙丁線末至

戊相會又自辛巳兩處各作兩線亦合於戊則丙丁線即分為三分而為甲乙線之相比例三率矣

有直線二率作與此相連比例三率線法如有八分甲乙四分甲丙之二線求作一二分之相連線則將甲丙甲乙二線合成甲角又於乙末增甲丙線度為甲戊線自乙至丙作一直線又於戊作乙丙之平行線如戊巳將甲丙線引至巳處則所引丙巳

線度即為二分之分而為甲乙甲丙相連比例第三率也甲乙甲丙乙戊丙巳為比例四率乙戊同甲丙除去不用則甲乙與甲丙之比同於甲丙與丙巳之比也

有直線三率欲作相比例第四率線再為相比例數率線則照樣作甲丙線而以甲乙線度截於乙處乃用規矩以甲為心以乙為界作一弧線而取乙丁線度一股立於乙一股交於弧線得相交之丁處遂作乙丁線又作甲戊線切丁

末如甲丙度長又作與乙丁平行之戊丙線其戊丙線即為第四率也盖甲丙全與甲乙段之比同於丁乙平行線與戊丙底之比比例同也若欲作相比例數率則

將甲戊甲丙線引長如癸子中作平行數線分為五段即得十相比例率也故以甲乙與甲丙之比同於丁乙與戊丙之比例甲丙與甲己之比同於戊丙與庚己之比例甲己與甲辛之比同於庚

已與壬辛之比例甲辛與甲癸之比同於壬辛與子癸之比例也

比例尺二股各有平分線分為二百餘分假如有丁戊一線欲分為十分則以規矩取丁戊線度立於尺各二百分之乙丙二點將尺乙丙二處照丁戊線度開之使不移動次以規矩立於尺之第二十分之已庚二點取已庚之閒度此閒度即是平分丁戊線為十分之度也何也如甲乙丙三

角形為己庚平行線所截則甲己與甲乙之比同於己庚與乙丙之比例甲己二十分甲乙二百分為十分之一乙丙十分己庚一分亦為十分之一也

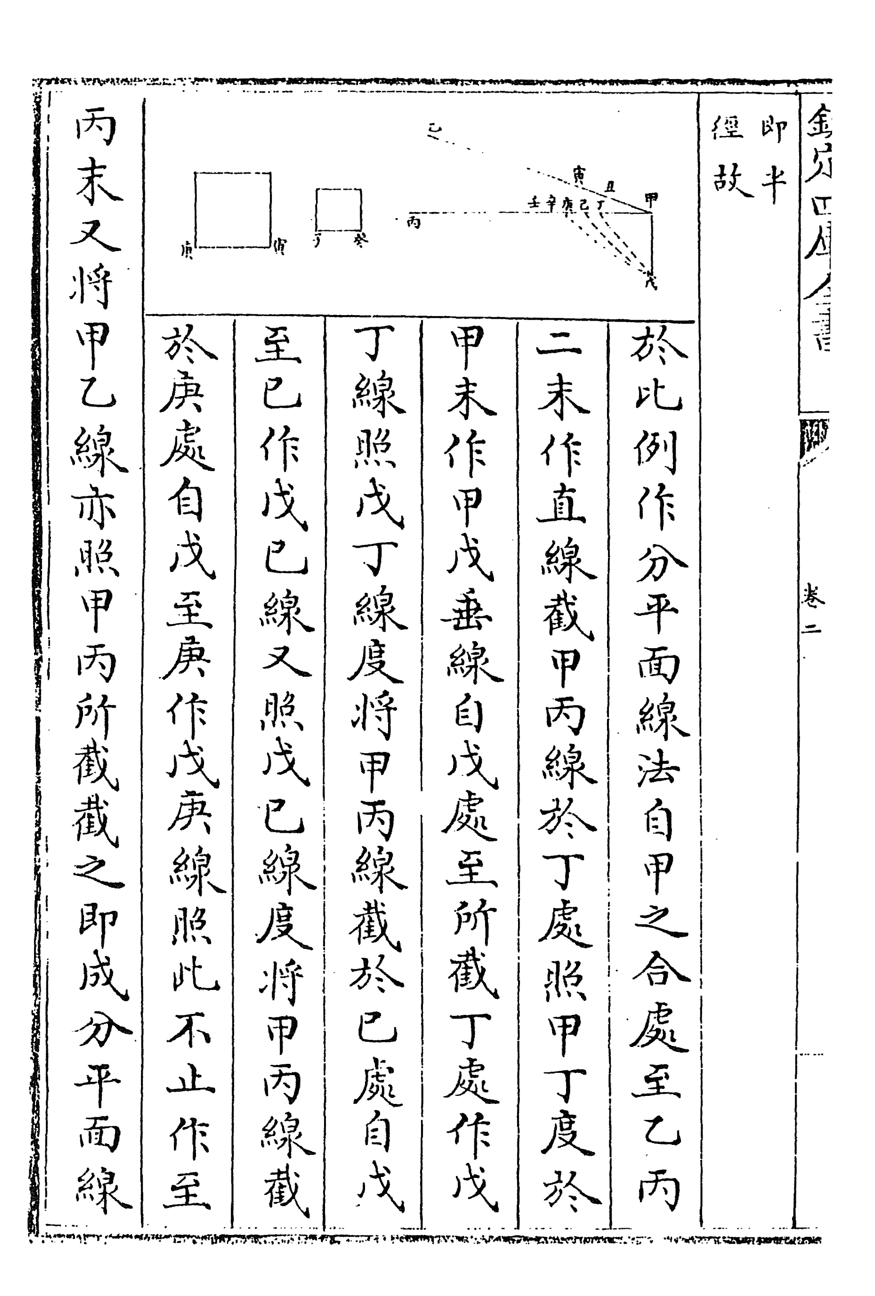
於比例尺作圓之諸弦線之總線法則自甲之合處至乙丙二末作二線於甲乙之丁處為心以甲乙兩末為界作半圓而分半圓界為百八十度自甲處至所分圓界各作弦線而立規矩一股於甲處又以一股於戊二十度己四十度庚六十度辛八十度壬百度癸百二十

度子百四十度丑百六十度等處取弦線度各作於甲乙甲丙兩線上即為諸弦線度之總線也

其取用之法若欲知寅角之度則以規矩一股立寅處一股任意作夘辰弧線隨取寅夘輻線之度立於尺之六十度之丁未處將尺之丁未照輻線度開之勿動乃將規矩取夘辰弧線之度放於尺兩股所容中間何處恰好若恰容在八十度之申酉處則是現原有寅角八十

度之弦線也何則若作丁未申酉二直線則甲申酉之三角形為平行之丁未線所截則甲丁與甲酉之比同於丁未與申酉之比也然則甲丁為六十度弦線甲酉為八十度弦線其與底平行之丁未線既與小圓輻線等所以丁未線為小圓六十度之弦線申酉線亦為小圓八十度之弦線以此知寅角卯辰度之為八十度也如此凡大小圓之輻線度安於尺之六十度處照此開之其大小圓之諸弦線之度俱現於兩股間也以六十度通弦

即半經故



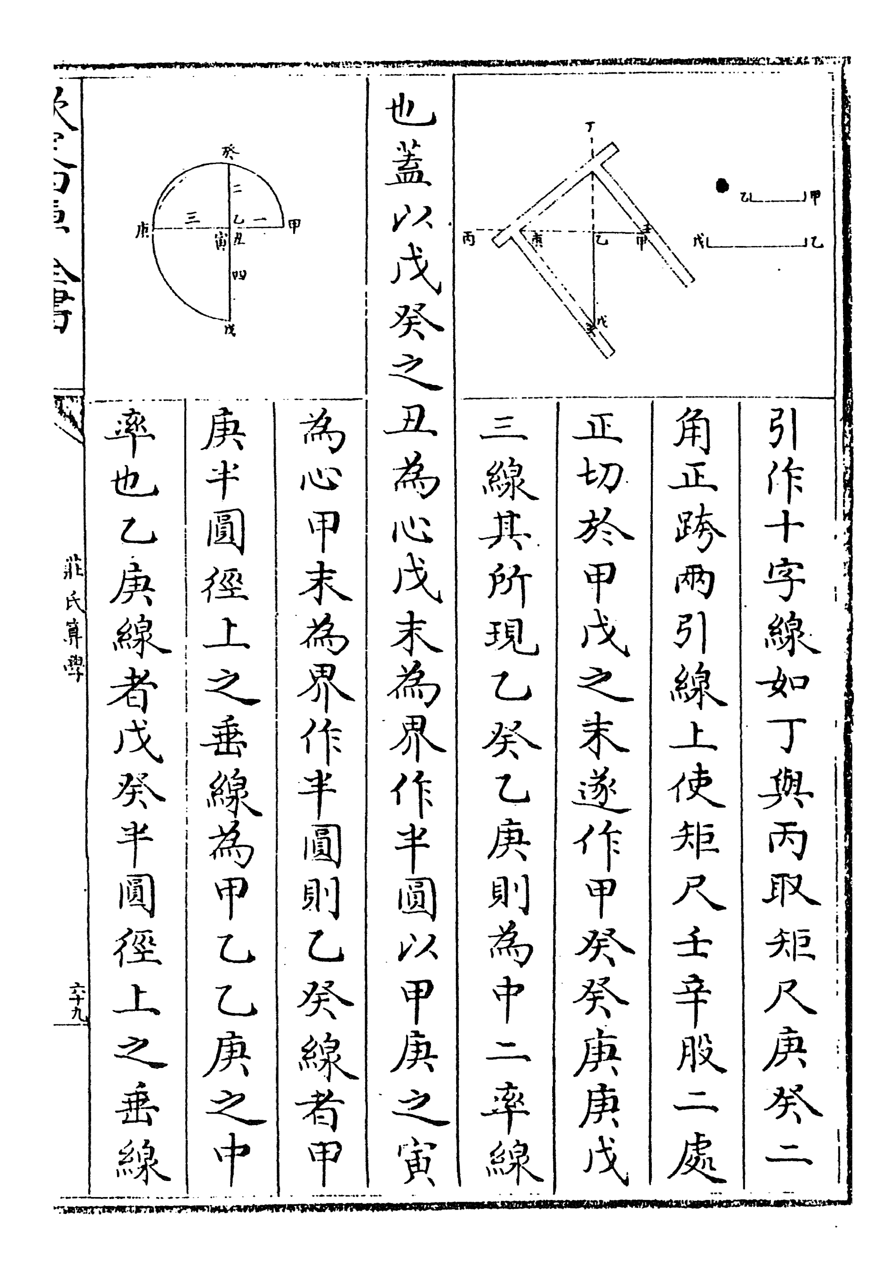
於比例作分平面線法自甲之合處至乙丙二末作直線截甲丙線於丁處照甲丁度於甲末作甲戊垂線自戊處至所截丁處作戊丁線照戊丁線度將甲丙線截於己處自戊至己作戊己線又照戊己線度將甲丙線截於庚處自戊至庚作戊庚線照此不止作至丙末又將甲乙線亦照甲丙所截截之即成分平面線

也何則於甲丁戊直角三角形之三界作三正方形甲丁甲戊上方相等者也丁戊上方兼甲丁甲戊兩方者也至甲己之界即丁戊之界是甲己上方比甲丁上方爲大一倍甲庚方大甲丁方爲二倍也由是推之甲庚方大甲己方一倍甲辛方又大甲庚方一倍如此則甲辛甲壬等界上方俱是大於甲丁界上方三倍四倍可知也苟有一癸子平面四方形欲大於此形二倍之四方形則以規矩取癸子界度立於丁處將尺照此度開

之勿動次將規矩取尺庚寅處度作方即大於癸子方二倍也盖於丁丑庚寅作二線而甲庚寅之三角為丑丁平行線所分則以甲丁比甲庚若丑丁比寅庚也甲庚既大於甲丁二倍則寅庚亦大於丑丁二倍矣

有二直線欲以此二線作中比例線法則將二直線相連為圓徑以平分處為心以兩末為界作圓形然後於二線連接處作垂線切圓界則為中比例線也

有二直線作中二率比例線如圖將二線合為直角又



引作十字線如丁與丙取矩尺庚癸二角正跨兩引線上使矩尺壬辛股二處正切於甲戊之末遂作甲癸癸庚庚戊三線其所現乙癸乙庚則為中二率線也蓋以戊癸之丑為心戊末為界作半圓以甲庚之寅為心甲末為界作半圓則乙癸線者甲庚半圓徑上之垂線為甲乙乙庚之中率也乙庚線者戊癸半圓徑上之垂線

為乙戊乙癸之中率也則以甲乙線比乙癸線同於以乙癸線比乙庚線也以乙癸線比乙庚線同於以乙庚線比乙戊線也故曰中二率也

於比例尺作分體線法則於甲之合處至二股之乙丙二末作甲乙甲丙二線以規矩取丁己方體之戊己界度立於甲而截於甲乙線之庚處次作大於戊己界一倍之辛壬線依前法求得中二率為癸子丑寅二線將癸子界作見方體則此

體大於丁巳見方體一倍也盖四線為相連比例率而

戊巳與辛壬為加二倍之比例則丁巳卯子二體為同

式而以戊巳癸子各一界相比之比例為加二倍之比

例也戊巳辛壬二線之比因同於丁巳卯子二體之比

例若辛壬第四線大於戊巳一倍則卯子體亦大於丁

巳體一倍矣次將規矩取癸子界度一股立於甲一股

照此度截於甲乙線之辰處則此度所作方體大於原

丁巳體一倍矣再作比原丁巳體之戊巳界長二倍之

已未線照前求中二率之申酉戌亥二線將申酉第二率線度取於規矩一股立於甲一股截甲乙線之乾處則甲乾界度所作方體比原丁巳體為二倍可知也照此不止作大於丁巳體之戊巳界或三四倍或五六倍之長線如前求得中二率將所求第二率度截於尺線上即成比例尺之分體線也若有一坎庚見方體欲作一大於此二倍之體則以規矩取坎庚體之艮庚界度將

比例尺之所截庚處照此開之勿動次將比例尺第三所截乾處之開度取於規矩即是大於坎庚體二倍之形界蓋甲庚線與甲乾線之比同於以庚庚與乾乾線之比例甲乾上方大於甲庚上方二倍則乾乾上方必大於庚庚上方二倍可知矣又有易分之法如一面之界度長一百釐則以此界一百釐自乘再乘則此體積共乙百萬釐大此一倍之體數為二百萬釐共二百萬釐體之一面界度為一百二十五釐又大二倍之體數

為三百萬釐其三百萬釐體之一面界度為一百四十四釐如此累加將外界之釐數書明又將釐度分於尺寸欲書入比例尺則將所書之數以規矩取所分之度初照一百釐界度截比例尺之庚處次照一百二十五釐界度截於辰處三照一百四十四釐界度截於乾處不止至末與前法所分俱為同也

有一直角四界形作為與此等積之正方形如圖將甲乙乙丙合為一直線求得中率之丁乙線作丁戊正方

形為與甲丙等積也盖相連比例三率其中率自乘之積與首率末率相乘之積等故丁巳上方與甲乙乘乙丙之方等積也

凡有三角形知其一角之度及角兩旁之界度或知其二角之度及一界之度或知三界度而不知角度欲求全知法如甲乙丙三角形知丙角為三十七度角兩旁丙甲界長十四丈丙乙界長十三丈則作與丙角為等之丁角亦三十七度角傍丁戊界作為十四

分長丁巳界作為十三分長自戊至巳作直線相會與甲乙丙大形同式將戊角之度取於規矩安於分度圓界看容多少便知戊角度若干若容七十度則大形甲角之度亦為七十度矣又小形巳角可知為七十三度則大形乙角亦七十三度矣再因小形戊巳界分作九分可知大形甲乙界之為九丈矣餘皆如此葢即小以知大舉一以例餘也

作不用比筭測高深廣遠各種三角形之儀器法先作



甲乙丙半圓界分為百八十度將此半圓之丁甲丁乙丁丙三半徑線每每分為一百分各作直線縱橫相交會如碁局再於徑線之兩末作兩立表安住不動又於丁心處如圖作一遊表如戊已將遊表亦如半徑度分為二百分再於此儀器後面掛一墜線為庚即可按線而測矣如欲測旗杆之高則將儀器之丁心安於所立之處定準墜線

以甲乙徑線兩末之立表與旗杆癸處對准為地平穩住不動再將戊巳遊表與旗杆尖之辛處相對准次量所立之丁處至旗杆癸處得若干若得四十丈則看儀器地平線上自丁心起用四十分當四十丈如子再看子處垂線與上遊表相交處得若干若得三十分如丑則旗杆之高為三十丈也若欲測丁辛弦線數則看自丁至丑相交處得若干分若得五十分則相當數為五十丈也若欲測丁癸辛三角形之各角度則癸角既為

直角再看圓界自乙至遊表相交處得若干度為丁角度與九十度相減所餘者為辛角度也

畫地圖者選戊己兩處可以盡見諸形先於戊處立儀器指諸要緊數處看所成之數角各得幾何度記之次移儀器到己處將不動表與已對準為地平亦指於諸要緊數處看所成之數角亦各幾何度亦記之然後取一幅紙任意作一線為戊己相當線將前所測角度做而作之一一與前相當成數三角形其中邊所有之形

一一畫上即成圖也若將大圖蹲入小圖則將大圖分為數正方形小圖亦分為數正方形與大圖相當將大圖中某方形内所函之山河城渠村林依蹲而入於小圖即與原大圖同也　凡有多界形倣此或為大或為小之同式形方如甲乙丙丁一無法形欲減各界之半作同式形則任意自一壬處作諸對角線又任意將甲乙界之度取其半為甲乙平行線作於甲壬乙

中心出線式

一角發線式

壬二線之間恰容癸子處照此於對角線間作諸界之平行線則所成癸子卯巳之形即是原有形每界減一半之同式小形也茍欲作大於原有之形則將對角線任意引長而照前任意加為界度與原界作平行線即成所欲作之大形也或自一角發線亦可

凡兩數相乘者平行方數也如二三相乘為六是也三數連乘者立方數也如二三乘得六又乘以四則為四六二十四也以上為幾何原本

凡一與三之比同於四與十二之比一與五之比同於十二與六十之比二之比三亦猶四之比六也六之比九也蓋凡可以倍計者皆可為比例二其二而為四二其三而為六三其二而為六三其三而為九故三與九之比同於六與三十六之比按末句有誤數

凡可以度盡大數之衆小數相合於此加數根之一所得之總數與所度之大數等也如大數有六可以小數二三度盡若加數根一則亦六也

大數二十八可以小數二四七十四度盡若將二四七十四與數根之一并之則亦二十八也

有一比例數求與此比例相等之相連比例數法如三與五之比例求與此比例相等之相連比例幾將三自因得九又三與五因得十五又五自因得二十五則比九與十五及二十五之三數為三與五比例相等之相連比例三數也三與五之比同於九與十五之比例九與十五之比同於十五與二十五之比為相連比例也

又將三因九因十五因二十五得二十七及四十五與七十五又將五因二十五得一百二十五此所得二十七四十五七十五一百二十五之四數為三與五比例相等之相連比例四數同於三與五之比例也

凡一數除衆數所除得數之比同於原衆數之比也如以三歸十二而得四以三歸十五而得五則四與五之比若十二與十五之比也而四與十二之比同於五與十五之比也

有同相比例四數其首末相乘所得數與中兩數相乘之得數等也有相等兩方數則此縱與彼縱之比同於以彼横與此横之比也如四六相乘與三八相乘皆為二十四則以此之六比彼之八以彼之三比此之四比例為等也

凡以兩數除一數而盡此得之兩數相比若所用以歸除兩數之比也如四除三十六而得九六除三十六而得六則九六兩數之比若六四之比也

凡有平加衆數此衆數內之凡一數若作為原數將此數以上有幾位平加幾次相差之數與首數並之得數為與原數等也如上所列之數若將十五作原數此十五以上有四位而衆數原平加之數係三若將三之四次數而與首數三相並得十五與所作原數之數等也由此推之若於平加衆數內凡減一位將所餘之位數與原平加之數相乘得數與衆小數內至小數相並與衆數內至大數為等也假如上六數內減一數餘五數

將此五與平加之三相因得十五與至小數三相並得

三 六 九 一二 一五 一八

十八為與至大數相等矣

凡平加衆數若將此數內之兩數相並所得數與兩傍相等隔位之他兩數相並得數等也如十二與九為廿一十五與六亦廿一十八與三亦廿一也蓋升愈升降愈降合降與升則但見平也

又將此內凡一數之兩傍數相加折半即與中間數等也如十五加九為廿四折半斯得十二矣十二加六為

十八折半斯得九矣十八加十二為三十折半斯得十五矣其理則前節可推也

又此平加衆數若將首末兩數相加以所有幾位之位數相乘得數折半則與原有衆數之總數等也如十八加三為廿一以位數六乘之得乙百二十六折半得六十三與衆數之總數等也蓋照前節推六數相加合成三十三今以六乘故必折半也若五位或七位之奇數理亦相同

凡平加之位若是奇數則以中一位之數與位數幾相乘即得衆數之總數也如所列以中一位一〇乘位數五得五十即為衆數之總數也蓋首尾相加乘位數折半而得總數今中位乃首尾相加之一半故以乘位數

四七〇三六
一一一
總數五〇

即為總數也

凡有自一每位平加二比例衆奇數之總與位數自乘之得數等也如所列總數得四十九以位數七七自乘亦四十九也若一三五七九五位總數二十五以位數

五自乘亦二十五也理如前節以中一位數乘位數同蓋七位則七為中五位則五為中故也亦如首乘相並

一 三 五 七 九 一一 一三

折半乘位數之理也

凡有自二每位平加二之比例衆偶數以位數加一以與位數相乘即與衆數之總數等也如所列位數是七加一為八以與位數七相乘為五十六即總數之數也亦即首末相加折半乘中一位之理也若位數是偶則

二 四 六 八 一○ 一二 一四

以位數自乘可得衆數之總數也

凡平加比例之衆數如所列以小數一與大數十一相減餘十以平加數根二除之得五再加入小數一得六

一	三	五	七	九	一一

即原有之位數也

凡平加比例知小數及位數與平加數根而求大數法如所列知小數三知位數六知平加數根四將位數六減一餘五與平加數四相因得二十加入小數三即大數為廿三也

若欲知小數則亦以位數六減一餘五與平加數四相

因得二十以與大數十三相減餘三則此三即為至小數也

若知小數及位數及平加數根而求知總數則先察得大數為二十三加入小數三為二十六以與位數六相乘得一百五十六折半得七十八為所求之總數也

若知大數及平加數根及位數而求知總數法亦如之

若知大小兩數及位數求平加數根法則將三與廿三相減餘二十又將位數六減一為五除之得四則此四

為平加數之根也

若知大小兩數及平加數根而求位數法則將大數與小數相減餘二十以平加數四除之得五加一為六即是所求之位數也

若知平加之數根與位數及衆位之總數而求至大至小之兩數法則將總數七十八以位數六除之得十三為首末兩數相加之一半又將十三加倍作廿六為首末兩數相加之總數乃將位數六減一餘五與平加數

根四相乘得二十為至大數又將前所得之二十六與此二十相減餘六為小數之加一倍數此數折半為三是所求之至小數也將三加入二十得二十三為所求之至大數也此法之理備於前矣

凡不等兩數求一數可以度盡之法如二十與廿四相減餘四又將四與二十相減餘十六以十六與四相減餘八以四減八則無餘則此四為度盡兩數之數也謂之轉減亦謂之紐數

三邊無角不可以相比例則必先求中長線以為正弦然後角可求也然中長線之數為正弦而僅有半徑無角無餘弦則其數又不可知故以勾弦求股之術求之除一邊為弦則總較之術所求者勾也盖兩弦之總之較既具於上兩邊矣所求者欲破下邊以為兩勾而得其較耳兩弦之總乘弦之較以兩勾之總除之必得較矣鈍角則以較除而得總以勾較之餘取其半以益較必得大勾矣存其半必得小勾矣如此則中長線之數可明而勾

股弦相求之術可施既得勾股之數則用以與半徑正餘弦相比例兩角可得矣

一角有角無對邊數兩邊有邊無對角數則皆不可以立求矣然此兩邊所對之角乃與得角合成半周度是此角之外之弧度即兩角之度也但未知兩角之大小何如剖分耳惟外角有平行之對角與兩角之一角等度則雖其數未可知而其形可剖欲知其數者必以兩角之較求之欲知兩角之較者又必以兩邊之較例之

兩邊有總有較半外角又有切線則可因是以求半較角矣以半較角減半外角則小邊對角之度得矣其餘一角則可以三隅反矣

三較連乘者求三角容圓之半徑也○三較者三邊與半總相較之餘也三較連乘所得之數乃容員半徑自乘又乘半總之數也故以三較連乘為中率而以半總除之則得容員半徑之積數矣以積數開方則得半徑矣○兩數所以相合者何也蓋引伸三較於一邊則半

總也從兩邊之角直剖為長線於第一較處橫斷作小勾即容員半徑也至末總斷作大勾而以容員半徑乘之即二較三較相乘之數也小勾自乘比乘大勾如第一較與半總之比例則二較相乘以小勾自乘乘之亦如第一較與半總之比例

闕

錢百文買果百顆　梨一顆錢三文　柑一顆錢二文　橄欖七顆錢一文　算得梨四顆錢十二文　柑四十

顆錢八十文

橄欖五十六顆錢八文

按此條前後皆有闕文

莊氏算學卷二